بررسی عددی جریان آرام وگذرای سیال ویسکوالاستیک از نوع گزیکس حول سیلندر دایروی*

سیدرسول واردی(۱) محمدجواد مغربی(۲) محمود نوروزی(۳) محمدمحسن شاه‌مردان(٤)

چکیده در این پژوهش، جریان گذرای سیال ویسکوالاستیک در اطراف یک سیلندر دایروی مورد بررسی قرار می‌گیرد. روش عددی در نظر گرفته شده، روش حجم محدود از مرتبه‌ی دو است. برای بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک حول سیلندر، از مدل گزیکس به‌عنوان معادله‌ی ساختاری سیال ویسکوالاستیک بهره گرفته شده است. این مدل غیرخطی از توانایی برجسته‌ای در توصیف ویسکوزیته در ناحیه‌ی توانی و هم‌چنین اثر اختلاف تنش‌های نرمال برخوردار است. در این تحقیق، اثرات خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک بر فرکانس جریان و طول ناحیه‌ی جریان برگشتی ایجادشده در پشت سیلندر قبل از رسیدن به رینولدز بحرانی، در قالب عدد بی‌بعد وایزنبرگ و هم‌چنین اثر ازدیاد عدد رینولدز بر الگوی جریان سیال ویسکوالاستیک مورد بررسی قرار خواهد گرفت. هم‌چنین با بررسی توزیع فشار حول سیلندر در سیال ویسکوالاستیک و مقایسه‌ی آن با جریان سیال نیوتنی، پدیده‌ی کاهش پسا در این گونه از سیالات مورد مطالعه قرار می‌گیرد. شایان ذکر است که نتایج حاصل از حل عددی سیال نیوتنی، با تحقیقات آزمایشگاهی و عددی پیشین مطابقت کامل دارد.

واژه‌های کلیدی مدل گزیکس، جریان ویسکوالاستیک، حل عددی، فون‌کارمن، سیلندر دایروی، وابسته به زمان.

Numerical Investigation of Transient Laminar Flow of a Giesekus Viscoelastic Fluid around a Circular Cylinder

S.R. Varedi M.J. Maghrebi M. Norouzi M.M. Shahmardan

Abstract *In this paper, the transient inertial viscoelastic flow around a circular cylinder is investigated numerically. A second order finite-volume method is used to increase the numerical accuracy. Here, the Giesekus model is used as the constitutive equation. This nonlinear model has prominent ability in describing normal stress differences and viscosity in power-law regions. The impacts of the elasticity and Reynolds number on the shedding frequency are discussed. Also, drag reduction phenomenon in the viscoelastic flow is studied by extracting pressure distribution on the cylinder surface. The obtained results are in good agreement with recent experimental and numerical investigations reported in the literature for Newtonian fluids.*

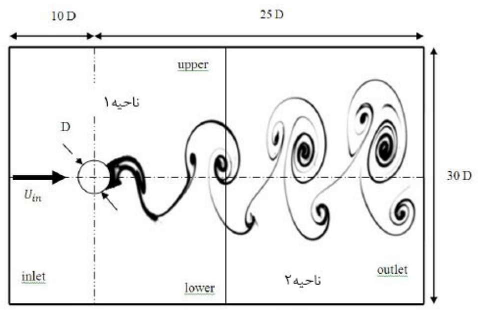
Key Words Giesekus model, Viscoelastic Flow, Numerical Method, Circular Cylinder, Von Kármán, Time Dependent.

* تاریخ دریافت مقاله ۹۰/۱۱/۲۶ و تاریخ پذیرش آن ۹۲/۲/۲۹ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد مهندسی مکانیک، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
(۲) نویسنده‌ی مسؤول: استاد، گروه مکانیک، دانشکده مهندسی، دانشگاه فردوسی مشهد.
(۳) استادیار، گروه حرارت و سیالات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.
(٤) دانشیار، گروه حرارت و سیالات، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شاهرود.

مقدمه

مطالعه‌ی جریان بر روی سیلندر، از موضوعات جالب توجه و کاربردی در دینامیک سیالات است و از جمله مسایل بنیادین در این عرصه محسوب می‌شود. این مسأله، هم در هندسه و هم در شرایط مرزی هیچ گونه محدودیتی ندارد. هم‌چنین ساختار و الگوی جریان نیز در رژیم‌های مختلف در این مسأله متفاوت می‌باشد. در جریان خزشی سیال نیوتنی ($Re < 1$)، به دلیل شرط عدم لغزش بر روی سیلندر، گردابه‌هایی به‌وجود می‌آید که با توجه به فرض استوکس، این گردابه‌ها در جریان پخش می‌شود و قدرت نفوذ و حرکت در جریان را ندارد. در اعداد رینولدز بین ٤ تا ٤٠، دو گردابه‌ی متقارن ایستا در پشت سیلندر به‌وجود می‌آید که با افزایش عدد رینولدز، اندازه‌ی آن‌ها نیز بزرگ‌تر می‌گردد. رژیم جریان در این محدوده از اعداد رینولدز، کاملاً آرام می‌باشد. هنگامی که عدد رینولدز جریان نیوتنی از حد مشخصی فراتر رود ($Re >$ ٤٠)، در اثر کوچک‌ترین شرایط ناپایداری، نقطه‌ی جدایش جریان حول جسم تغییر کرده و گردابه‌های متقارن که به شکل دنباله در پشت سیلندر به‌وجود آمده‌اند، در آستانه‌ی نوسان قرار می‌گیرند. در این هنگام یکی از گردابه‌ها، از پشت سیلندر جدا می‌شود و در پایین دست جریان نفوذ می‌کند. به‌منظور تعادل انرژی، گردابه‌ی دیگر جای آن را پر می‌کند و به این ترتیب و در نتیجه‌ی این ناپایداری، الگوی متقارن جریان از بین می‌رود و توزیع فشار حول جسم دستخوش تغییر می‌گردد و سبب می‌شود که گردابه‌ها، به‌صورت متناوب، یکی در بالا و دیگری در پایین محور تقارن جسم به‌وجود آیند. شایان ذکر است که در این رژیم از جریان، ناحیه ویک پشت سیلندر، شامل دو ردیف از گردابه‌ها می‌باشد که به‌صورت متناوب یکی در بالا و دیگری در پایین سیلندر به‌وجود می‌آید. به الگوی پیدایش دو ردیف از گردابه‌ها در ناحیه‌ی پشت سیلندر، پدیده‌ی فون‌کارمن (Von Kármán) اطلاق می‌گردد. در شکل (۱) شماتیکی از این پدیده، به هنگام عبور جریان از سیلندری دایروی آورده شده است. این پدیده، نیروهای متناوب عمودی را بر جسم اعمال می‌کند که سبب مرتعش شدن جسم تحت فرکانس خاصی می‌شود. حال اگر فرکانس نوسان با فرکانس طبیعی جسم برابر گردد، تشدید یا رزونانس (Resonance) در جسم به وجود می‌آید. از مثال‌های معروف در این زمینه می‌توان به روش‌های محافظت از برج‌های خنک‌کن نیروگاه‌ها در برابر جریان باد اشاره نمود. در این سازه‌ها برای جلوگیری از تشکیل گردابه‌های تناوبی و پیشگیری از وقوع پدیده رزونانس، پره‌هایی را به‌صورت مارپیچ حول آن‌ها قرار می‌دهند. از دیگر موارد وقوع این پدیده، می‌توان به ارتعاش کابل‌های انتقال قدرت، برج‌هایی با ارتفاع بلند، پایه پل‌های مستغرق در آب و جریان در مبدل‌های حرارتی اشاره نمود.



شکل ۱ پدیده فون کارمن به شکل نمادین

از موارد استفاده از این پدیده در صنعت، می‌توان به تعیین دبی جریان در خطوط نفت و گاز اشاره نمود. بر مبنای این پدیده، جسم توپی شکلی (Bluff body) در مسیر جریان قرار داده می‌شود و فرکانس گردابه‌های ایجاد شده، از طریق فشار سنج‌های بسیار حساسی که در ناحیه‌ی پایین‌دست جریان تعبیه شده‌اند، اندازه گیری می‌گردد. از آن‌جایی که سرعت جریان متناسب با فرکانس تشکیل گردابه‌ها است، لذا

می‌توان به‌وسیله‌ی حاصل‌ضرب سطح مقطع دستگاه در سرعت جریان به‌دست‌آمده، مقدار دبی گذرنده را محاسبه نمود. این دستگاه به نام ورتکس فلومتر (Vortex flow meter) مشهور می‌باشد. عدم وجود جسم متحرک، هزینه‌ی پایین نصب و هم‌چنین قابلیت استفاده از آن در اختلاف فشارهای بالا با نسبت ۱:۵ (بازه‌ی کارایی اوریفیس مترها بین ۱:۳.۵می‌باشد) از جمله مزایای استفاده از این دستگاه می‌باشد. شایان ذکر است که علاوه بر موارد ذکر شده، این موضوع در بسیاری از فرایندهای تولید مواد غذایی، بهداشتی و صنایع دارویی و شیمیایی کاربردهای گسترده دارد. از آن‌جایی که ماده‌ی اولیه در این صنایع، سیالات غیرنیوتنی می‌باشد، لذا به‌منظور دریافت فهمی بهتر از چگونگی تأثیر خواص رئولوژیکی (Rheology) بر الگوی پیدایش گردابه‌های فون‌کارمن، مدل‌سازی این نوع از جریان لازم و ضروری به نظر می‌رسد.

با توجه به مطالعات صورت‌گرفته توسط نویسندگان این مقاله، اکثر تحقیقات پیشین در این خصوص، محدود به سیالات نیوتنی بوده‌اند، به‌طوری که می‌توان گفت سهم سیالات غیر نیوتنی از جمله سیالات ویسکوالاستیک بسیار کم و انگشت‌شمار می‌باشد. لازم به ذکر است که در این‌گونه از سیالات، به دلیل وجود خاصیت الاستیک و غیرخطی بودن ویسکوزیته نسبت به نرخ برش، مدل‌سازی جریان سیال ویسکوالاستیک حول سیلندر خصوصاً در رینولدزی بالاتر از رینولدز بحرانی (Critical Reynolds) بسیار پیچیده است. از این رو، مطالعات انجام‌شده در این خصوص، بیش‌تر بر پایه‌ی مشاهدات آزمایشگاهی می‌باشد. در تعدادی از این آزمایش‌ها، تنها به بررسی کاهش پسا (Drag) در اثر افزودن ماده‌ی پلیمری به حلال نیوتنی و اثرات خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک بر ضریب پسا پرداخته شده است که از آن جمله می‌توان به تحقیقات برودبنت و منا [1]، گاد [2]، جیمز و آکوستا [3]، جیمز و گوپتا [4] و منا و کسول [5] اشاره نمود. تعدادی دیگر از این آزمایش‌ها نیز به بررسی اثرات خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک و هم‌چنین عدد رینولدز، بر خطوط جریان و پروفیل سرعت پرداخته اند که تحقیقات کنیوت و آدلر [6]، مانرو و منا [7] و اولتمن و دن [8] از جمله این آزمایش‌ها می‌باشد. در ادامه، بیش‌تر به بیان تاریخچه‌ای از تحقیقات ارائه شده در رابطه با ناپایداری به‌وجود آمده در پشت سیلندر و گردابه‌های فون‌کارمن حاصل از آن در سیالات ویسکوالاستیک پرداخته شده است.

گاد [2] در سال ۱۹٦٦ به بررسی تغییرات عدد استروهال (Strouhal number) با افزودن ماده‌ی پلیمری پلی ایزوبوتیلن در آب پرداخت. رینولدز جریان در آزمایش وی، عدد ۲٤۰ و غلظت ماده‌ی پلیمری آن بین ۵ تا ٤۰ ppm گزارش شده بود. وی مشاهده کرد که فرکانس جریان به هنگام افزودن این ماده‌ی پلیمری به حلال نیوتنی کاهش می‌یابد. از دیگر مشاهدات وی این بود که با افزایش غلظت ماده‌ی پلیمری در آب، مقدار فرکانس جریان با کاهش بیش‌تری مواجه خواهد شد.

آزمایشی مشابه، توسط کالاشنیکو و کودین [9] در رینولدز ٤۰۰ و غلظت ۱۰۰ ppm انجام شد. آن‌ها نیز نشان دادند که فرکانس جریان در حضور ماده‌ی پلیمری به‌شدت کاهش می‌یابد. در آزمایش یوسی و همکاران [10] شکل ناحیه ویک (Wake) جریان برای حلال پلیمری با غلظت‌های ۱۰۰ و ۲۰۰ و ٤۰۰ ppm در رینولدز کم‌تر از ۳۰۰ مورد بررسی قرار گرفت. ضمن تأیید نتایج کالاشنویک و کودین [9]، آن‌ها نیز نشان دادند که با افزایش غلظت ماده‌ی پلیمری یا کاهش قطر سیلندر، مقدار عدد استروهال به‌شدت کاهش می‌یابد. از دیگر مطالعات آزمایشگاهی در این خصوص می‌توان به تحقیقات کودات و همکاران [11,12] اشاره نمود. در دو تحقیق ارائه شده توسط آنان، حلال پلیمری PEO از طریق حفره‌ای که در

بالادست جریان سیال قرار گرفته بود، به داخل آن هدایت می‌شد. در تحقیق اول [11]، آن‌ها به بررسی جریان دو بعدی در رینولدز ۱۸۵ پرداختند و با وارد کردن حلال پلیمری با دو وزن مولکولی متفاوت، اثرات آن را بر مشخصه‌های جریان استخراج نمودند. آن‌ها مشاهده کردند که با افزایش نرخ ورود ماده‌ی پلیمری با مولکول‌هایی با وزن مولکولی بالاتر، طول ناحیه ویک ایجاد شده در پشت سیلندر افزایش و ضخامت این ناحیه کاهش می‌یابد. هم‌چنین با وارد کردن ماده‌ی پلیمری با وزن مولکولی کم‌تر حتی با ازدیاد نرخ ورود آن به سیال، تأثیر محسوسی در مشخصات جریان مشاهده نشد. در تحقیق بعدی [12] ارائه شده توسط وی و همکارانش، تأثیرات خاصیت ویسکوالاستیکی سیال در تأخیر ناپایداری به‌صورت افزایش طول ناحیه ویک ایجاد شده در پشت سیلندر مورد مطالعه قرار گرفت. در آزمایش انجام شده توسط کرسمن و همکاران [13] برای جریان دو بعدی در رینولدز ۴۰۰، آشکار شد که در حقیقت افزودنی‌های پلیمری با وزن مولکولی بالا، به‌شدت فرکانس جریان را تحت تأثیر قرار می‌دهد. از طرفی برای ماده‌ی پلیمری با وزن مولکولی پایین حتی با غلظت بالا، اثرات قابل‌ملاحظه‌ای در جریان مشاهده نشد. هم‌چنین آن‌ها علت کاهش فرکانس جریان و کم شدن دامنه نوسان در حضور ماده‌ی پلیمری با وزن مولکولی بالا را به‌خاطر خاصیت الاستیک ماده‌ی پلیمری اضافه‌شده دانستند .اخیراً، کولهو و پینهو [14] از دو ماده‌ی پلیمری با خاصیت الاستیکی کم و زیاد به نام‌های CMC و Tylose به‌صورت مجزا، به‌عنوان افزودنی‌های پلیمری به حلال نیوتنی آب استفاده نموده و نوسانات جریان ایجادشده در پشت سیلندر را مورد بررسی قرار دادند. محدوده‌ی رینولدز در نظر گرفته شده در کار آن‌ها بین ۵۰ تا ۹۰۰۰ بوده است. بنابراین رژیم‌های مختلفی از جریان را پوشش می‌داد. آن‌ها دریافتند که افزایش خاصیت الاستیک سیال، رینولدز بحرانی در رژیم‌های مختلف جریان را افزایش می‌دهد.

همان‌طور که ذکر شد، اکثر مطالعات انجام شده در زمینه‌ی جریان سیال ویسکوالاستیک حول سیلندر به‌صورت آزمایشگاهی بوده و به دلیل پیچیدگی‌های موجود خصوصاً در رابطه با مدل سازی گردابه‌های ایجاد شده در ناحیه ویک جریان، بررسی‌های عددی روی این موضوع بیش‌تر در اعداد رینولدز پایین و زیر رینولدز بحرانی بوده است. از جمله این تحقیقات می‌توان به کار الویرا [15] و ساهین و اون [16] در سال‌های اخیر اشاره نمود. آن‌ها از مدل FENE-CR به‌عنوان معادله‌ی ساختاری (Constitutive equation) سیال ویسکوالاستیک استفاه نموده و در اعداد رینولدز پایین، مشخصات جریان سیال حول سیلندر را استخراج نمودند. در هر دو این مطالعات، کاهش عدد استروهال، کاهش پسا و افزایش طول ناحیه‌ی ورتکس ایجاد شده در پشت سیلندر در اثر افزایش عدد وایزنبرگ و قابلیت کشسانی (Elongation) سیال گزارش شد که با نتایج آزمایشگاهی انجام شده سازگار است. ریچتر و همکاران [17] نیز به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک و تغییرات در آن در اثر افزایش قابلیت کشسانی سیال در دو عدد رینولدز ۱۰۰ و ۳۰۰ پرداختند. مدل مورد استفاده در کار آن‌ها نیز مدل FENE-P بوده است. نتایج حاصل از حل در رینولدز ۱۰۰ با نتایج الویرا [15] مطابقت داده شد. هم‌چنین آن‌ها دریافتند که الگوی جریان در عدد رینولدز ۳۰۰، رفتار سه‌بعدی از خود نشان می‌دهد.

در تحقیق حاضر برای نخستین بار، با استفاده از مدل سه ثابته گزیکس (Giesekus) [18] به بررسی جریان سیال ویسکوالاستیک حول سیلندر پرداخته شده است. این مدل بر مبنای دیدگاه مولکولی استوار است. امتیاز اصلی این مدل آن است که قادر به ارائه‌ی رفتار توانی (Power-Law) برای ویسکوزیته و ثابت‌های اختلاف تنش (Stress differences) می‌باشد. بنابراین می‌توان با استفاده از آن، اثرات اختلاف تنش نرمال اول

و دوم بر جریان را نیز مشاهده نمود. در این پژوهش، به دلیل وجود شرایط ناپایداری و غیر متقارن بودن جریان، هندسه‌ی مسأله کامل در نظر گرفته شده است.

همان‌طور که در شکل (۱) مشاهده می‌شود، به‌منظور جلوگیری از تأثیر مرزهای بالایی و پایینی بر جریان، شرط لغزش برای آن‌ها در نظر گرفته شده است و تا حد ممکن، فاصله‌ی مرزها تا سیلندر زیاد انتخاب شده است. از جمله نوآوری‌های موجود در این تحقیق، بررسی اثرات خاصیت الاستیک بر فرکانس گردبه‌ای فون کارمن و طول ناحیه‌ی جریان برگشتی قبل از رسیدن به رینولدز بحرانی با استفاده از مدل رئولوژیکی گزیکس می‌باشد. هم‌چنین با رسم تغییرات فشار حول سیلندر در جریان سیال ویسکوالاستیک و مقایسه‌ی آن با حالت نیوتنی، به بررسی پدیده‌ی کاهش پسا در جریان سیالات ویسکوالاستیک پرداخته شده است. عدد رینولدز پایه در نظر گرفته شده برای بررسی اثرات الاستیک سیال بر جریان، مقدار ثابت ۱۰۰ می‌باشد. خاصیت الاستیک سیال در قالب عدد بی‌بعد وایزنبرگ و در محدوده‌ی صفر تا ۸۰ تغییر داده شده است. هم‌چنین با افزایش عدد رینولدز در محدوده‌ی ۵۰ تا ۱۲۰ در عدد وایزنبرگ ثابت، به بررسی اثر آن بر الگوی جریان سیال ویسکوالاستیک و مقایسه آن با جریان سیال نیوتنی پرداخته شده است. روش عددی در نظر گرفته شده، روش حجم محدود می‌باشد و گسسته‌سازی معادلات حاکم از مرتبه دو نسبت به زمان و مکان می‌باشد تا دقت به‌تری در حل معادلات حاکم حاصل شود.

معادلات حاکم و معادله‌ی ساختاری

معادلات حاکم برای جریان آرام تراکم‌ناپذیر سیال ویسکوالاستیک شامل معادله‌ی پیوستگی و معادله‌ی بقای مومنتوم می‌باشد که به‌ترتیب در زیر آورده شده است.

$$\nabla . u = 0 \qquad (۱)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + u.\nabla(\rho u) = -\nabla p + \nabla.\tau + \rho g \qquad (۲)$$

در معادلات فوق، ρ چگالی سیال، u بردار سرعت، p فشار، g شتاب جاذبه می‌باشد. سهم تنش ناشی از حلال نیوتنی τ_s و تنش ناشی از خاصیت الاستیک ماده‌ی پلیمری τ_p را می‌توان به‌صورت معادله‌ی (۳) از هم تفکیک نمود [19]:

$$\tau = \tau_s + \tau_p \qquad (۳)$$

معادله‌ی مکانیکی ساختاری برای توصیف رابطه بین تنش و نرخ برش در حلال نیوتنی به‌صورت رابطه‌ی (٤) می‌باشد:

$$\tau_s = \eta_s \dot{\gamma} \qquad (٤)$$

که در آن η_s ویسکوزیته حلال نیوتنی و $\dot{\gamma}$ تانسور نرخ برش است و به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\dot{\gamma} = \nabla u + |\nabla u|^T \qquad (۵)$$

هم‌چنین سهم تنش ناشی از خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک، از حل معادله‌ی ساختاری گزیکس رابطه (٦) حاصل می‌شود.

$$\tau_p + \lambda_1 \tau_{p(1)} + a\frac{\lambda_1}{\eta_p}(\tau_p.\tau_p) = \eta_p \dot{\gamma} \qquad (٦)$$

در معادله‌ی فوق، $\tau_{p(1)}$ مشتق فوق همرفتی تانسور (Upper convected derivative)، λ_1 زمان آسودگی (Relaxation Time) از تنش و η_p ویسکوزیته ماده‌ی پلیمری در نرخ برش صفر است. هم‌چنین α ضریب پویایی (Mobility factor) یا تحرک در سیال ویسکوالاستیک است که بیانگر رفتار غیر ایزوتروپیک برونی در هیدرودینامیک مولکولی ماده

ویسکوالاستیک می‌باشد. مطابق آزمایش‌های صورت‌گرفته در مطالعات اخیر [19] محدوده‌ی واقعی این پارامتر برای سیالات ویسکوالاستیک بین ۰.۵ >a >۰ می‌باشد. شایان ذکر است که سیال ویسکوالاستیک مورد نظر در تحقیق حاضر، محلول رقیق پلی‌ایزوبوتیلن (Polyisobutylene) در تترادکان (Tetradecane) می‌باشد. مشتق فوق همرفتی برای تانسور تنش پلیمری به‌صورت زیر بیان می‌شود.

$$\tau_{p(1)} = \frac{D}{Dt}\tau_p - [\nabla u^T . \tau_p] - [\tau_p . \nabla u] \qquad (۷)$$

که در آن $(D/Dt)\tau_p$ مشتق مادی (Material derivative) برای تنش پلیمری است که به‌صورت معادله‌ی (۸) بیان می‌شود.

$$\frac{D}{Dt}\tau_p = \frac{\partial}{\partial t}\tau_p + u.\nabla\tau_p \qquad (۸)$$

با قرار دادن $\tau_p = \tau - \tau_s = \tau + \eta_s\dot{\gamma}$ در معادله‌ی (٦)، می‌توان این معادله را به فرم معادله‌ی (۹) بازنویسی نمود.

$$\tau + \lambda_1\tau_{(1)} + \alpha\frac{\lambda_{(1)}}{\eta_{(0)}}\{\tau.\tau\} - \alpha\lambda_{(2)}\{\gamma_{(1)}.\tau + \gamma_{(1)}\} = \eta_{(0)}[\gamma_{(1)} + \lambda_{(2)}\gamma_{(2)} - \alpha\frac{\lambda_2^2}{\lambda_1}\{\gamma_{(1)}\cdot\gamma_{(2)}\}] \qquad (۹)$$

بنابراین می‌توان ویسکوزیته در نرخ برش صفر η_0، زمان رهایی (Retardation Time) از تنش λ_2 و پارامتر پویایی در سیال ویسکوالاستیک a را بر حسب η_s, η_p, α و λ_1 به‌صورت روابط (۱۰) بیان نمود.

$$\eta_0 = \eta_s + \eta_p \;;\; \lambda_2 = \lambda_1\frac{\eta_s}{\eta_p} \;;\; a = \frac{\alpha}{1-(\lambda_2/\lambda_1)} \qquad (۱۰)$$

در این مقاله مقدار α برابر ۰.۵ در نظر گرفته شده است. برای تعیین نسبت نیروی ناشی از خاصیت الاستیک به نیروی حاصل از ویسکوزیته از عدد بی‌بعد وایزنبرگ و به‌منظور تعیین نسبت نیروی اینرسی به نیروی ویسکوز، از عدد بی‌بعد رینولدز بهره گرفته شده است. هم‌چنین فرکانس جریان نیز در قالب عدد بی‌بعد استروهال بیان شده است. این اعداد به‌صورت روابط (۱۱) تعریف شده‌اند.

$$We = \lambda_1\frac{U_{in}}{D} \quad Re = \frac{\rho U_{in} D}{\eta_0} \;, St = \frac{f_s D}{U_{in}} \qquad (۱۱)$$

در این روابط، D، بیانگر قطر سیلندر، U_{in} سرعت جریان آزاد، f_s فرکانس نوسان، η_0، مجموع ویسکوزیته‌ی ماده‌ی پلیمری و حلال نیوتنی در نرخ برش صفر می‌باشد. شایان ذکر می‌باشد که مقادیر سرعت با U_{in}، فشار با ρU_{in}^2، زمان و ورتیسیتی با (U_{in}/D) به فرم بی‌بعد بیان شده‌اند.

روش حل عددی

گسسته‌سازی معادلات حاکم بر جریان بر پایه‌ی روش حجم محدود (FVM) می‌باشد. برای حل مقرون به صرفه معادلات غیر خطی کوپل‌شده، از روش تکرار عددی استفاده شده است. برای این منظور، از الگوریتم سیمپل (SIMPLE) استفاده شده است. در این روش به‌جای آن که از خود فشار در محاسبات استفاده شود از تصحیح فشار استفاده می‌گردد. همین امر در مورد میدان سرعت نیز برقرار است. یعنی سرعت‌هایی که از حل دستگاه خطی حاصل از معادله مومنتوم و با کمک فشار در گام زمانی قبلی به‌دست آمده‌اند، به‌عنوان مقادیر مبنایی فرض می‌شوند که تصحیحی باید به آن‌ها اضافه شود. لازم به ذکر است که می‌توان تمامی معادلات حاکم بر جریان را به‌صورت فرم کلی رابطه‌ی (۱۲) بیان نمود [20].

$$\frac{\partial}{\partial t}(A\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(Au_j\phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j}) + S_\phi \qquad (۱۲)$$

در این رابطه، ϕ متغیر کاری است که می‌تواند یک مولفه از یک بردار یا تانسور و حتی یک مقدار ثابت باشد. ضرایب A , Γ معانی متفاوتی برای متغیرهای کاری مختلف با خود به‌همراه دارد. عبارت S_ϕ جمله چشمه است که تعریف آن در معادلات مختلف متفاوت می‌باشد. این پارامترها در معادله‌ی پیوستگی به‌صورت $\phi=1, A=\rho, S_\phi=0$، در معادله‌ی مومنتوم به‌صورت $\phi=\tau_{ij}$, $A=\lambda$, $\Gamma=0$ تعریف می‌شود. از معادله‌ی (۱۲) بر المان حجم محدود P (شکل۲) در هر گام زمانی حل انتگرال‌گیری می‌شود، سپس با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس، رابطه‌ی (۱۳) حاصل می‌شود.

$$A\frac{\Delta V}{\delta t}(\phi_p-\phi_p^n)+\int(Au_j\phi-\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x_j})n_j dA=\bar{S}_\phi \qquad (۱۳)$$

در رابطه‌ی بالا، اندیس P معرف نقاط شبکه‌ی محاسباتی، بالانویس n مقدار محاسبه‌شده در زمان n، $\bar{S}_\phi$ انتگرال حجم جمله چشمه $\bar{S}_\phi$ می‌باشد. مقدار $\bar{S}_\phi$ در معادله‌ی (۱۳) را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی (۱٤) خطی‌سازی نمود.

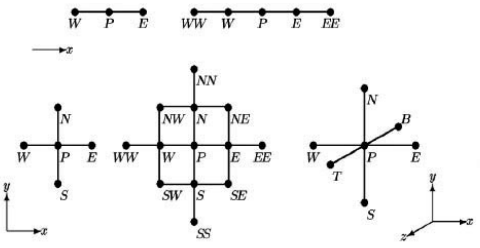
$$\bar{S}_\phi=\int_{\Delta V} S_\phi dV=\bar{S}_c+\bar{S}_p\phi_p \qquad (۱٤)$$

در معادله‌ی (۱٤)، $\bar{S}_c$ قسمتی از $\bar{S}_\phi$ می‌باشد که به طور صریح وابسته به ϕ نیست و $\bar{S}_p$ ضریبی از ϕ_p می‌باشد که پایداری عددی دستگاه معادلات حاصل از گسسته‌سازی را بهبود می‌دهد.

دستگاه معادلات گسسته شده‌ی نهایی که رابطه‌ی بین ϕ_p و نقطه‌ی همسایه آن را بر قرار می‌کند، برای هر المان حجم محدود به‌صورت زیر حاصل می‌شود.

$$a_p\phi_p=\sum a_{nb}\phi_{nb}+\bar{S}_c+a_p^0\phi_p^n \qquad (۱۵)$$

$$a_p^0=A\frac{\Delta V}{\delta t}\ ,\ a_p=\sum_{nb}a_{nb}+a_p^0-\bar{S}_p \qquad (۱٦)$$



شکل ۲ المان حجم محدود برای گره محاسباتیP

نتایج و بحث

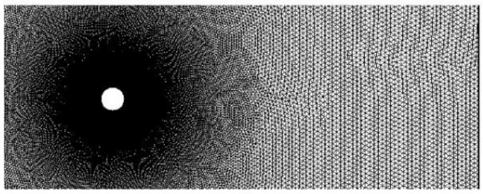
در ابتدای این قسمت، حساسیت و دقت کد CFD تهیه شده به‌منظور مطالعه‌ی این جریان، مورد بررسی قرار می‌گیرد. برای بررسی میزان حساسیت (استقلال حل از شبکه‌ی محاسباتی) و هم‌چنین دست‌یابی به شبکه‌ای مطلوب برای حل، چهار نوع شبکه مورد آزمایش قرار گرفته‌اند و نتایج آن‌ها با هم مقایسه شده است. مشخصات این شبکه‌ها در جدول (۱) آورده شده است. در این جدول، N_θ معرف تعداد سلول‌ها حول سیلندر، δ_s min اندازه کوچک‌ترین سلول که با قطر سیلندر بی‌بعد شده است، R_1 و R_2 به‌ترتیب نواحی ۱ و ۲ نشان داده شده در شکل (۱) و N_c تعداد کل سلول‌های شبکه می‌باشند.

جدول ۱ مشخصات شبکه‌های مختلف

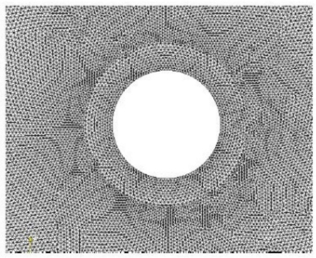
شبکه	N_θ	δs min	R_1	R_2	N_c
M-1	٤٥	۰.۰٦۸	۱۳۳٦۰۲	۱٦۹۰٦	**۱۵۰۵۰۸**
M-2	۹۰	۰.۰۳٤	۲۰۸۳٦۸	۱٦۹۰٦	**۲۲۵۲۷٤**
M-3	۱۳۵	۰.۰۲۲	۲۹٤۱۱۰	۱٦۹۰٦	**۳۱۱۰۱٦**
M-4	۱۸۰	۰.۰۱٦	٤۷۳۹۹٤	۱٦۹۰٦	**٤۹۰۹۰۰**

شبکه‌ها به‌صورت بی‌سازمان می‌باشند و اندازه‌ی سلول‌ها حول سیلندر، ریزتر انتخاب شده است (شکل ۳). دستگاه مختصات مرجع در مرکز سیلندر و محور x در راستای جریان اصلی قرار گرفته و برای

ارزیابی اثر بهبود شبکه بر حل، تعداد گره‌ها تا به‌دست آوردن شبکه‌ای مناسب به‌ترتیب افزایش داده شده است. در این تحقیق سعی شده که موقعیت قرارگیری صفحات مرزی نسبت به سیلندر طوری باشد که هیچگونه اثری بر جریان نداشته باشند. به‌عبارتی اندازه‌ی مرزهای محاسباتی به‌گونه‌ای است که جریانی با مرزهای نامحدود را حول سیلندر مدل نماید. برای این منظور مرز ورودی و خروجی به‌ترتیب در فاصله‌های ۲۰ و ۵۰ برابر شعاع نسبت به مرکز سیلندر قرار گرفته و فاصله‌ی مرزهای بالایی و پایینی نسبت به مرکز سیلندر ۳۰ برابر شعاع سیلندر در نظر گرفته شده است.



الف



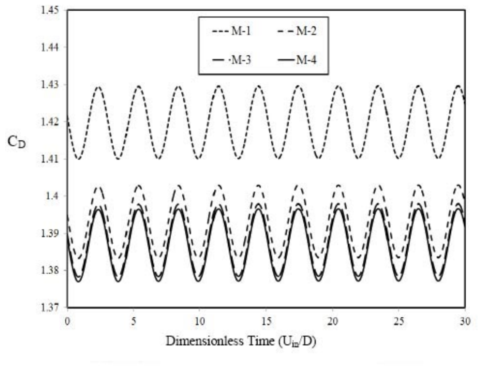
ب

شکل ۳ شبکه‌ی M-3 (الف: محدوده‌ی حل، ب: بزرگ‌نمایی شبکه حول سیلندر)

در مرز ورودی، جریانی با سرعت یکنواخت وارد شده، تنش و گرادیان فشار در آن برابر صفر می‌باشد. در خروجی جریان، گرادیان سرعت و گرادیان تنش برابر صفر و فشار برابر فشار اتمسفری می‌باشد. در صفحات مرزی بالایی و پایینی، شرط لغزش در نظر گرفته شده است. بر روی سیلندر نیز شرط عدم لغزش حاکم می‌باشد و گرادیان فشار و تنش در آن برابر صفر است. در این‌جا از گسسته‌سازی مرتبه دوم زمانی و مکانی استفاده شده است. مقدار عدد کورانت برابر ۱ در نظر گرفته شده است، به نحوی که نسبت $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ در هر چهار شبکه ثابت باشد. شایان ذکر است که شرایط اولیه‌ی مسأله کاملاً متقارن در نظر گرفته شده است، به نحوی که سیال در حال سکون است و نوسان در جریان به‌صورت طبیعی رخ می‌دهد. در ابتدای مدل‌سازی، گردابه‌های به‌وجودآمده در اثر شرط عدم لغزش بر سیلندر در ناحیه‌ی پشت آن، کاملاً متقارن‌اند و با افزایش گام زمانی بزرگ‌تر می‌شوند. بعد از گذشت چند گام زمانی اولیه، مشاهده می‌شود که گردابه‌های متقارن، به‌صورت متناوب یکی در بالا و دیگری در پایین سطح سیلندر شروع به نوسان می‌کنند به‌نحوی که دو ردیف از گردابه‌ها در پشت سیلندر به وجود می‌آیند. حرکت منظم گردابه‌ها، سرعت نسبی را در ناحیه ویک سیلندر به‌وجود خواهد آورد که به‌صورت کاملاً پریودیک می‌باشد. با رسیدن به رژیم کاملاً توسعه یافته از جریان تناوبی، مشاهده می‌شود که تغییرات در ضرایب برآ و پسا کاملاً رفتار سینوسی از خود نشان می‌دهند (به شکل ٤ رجوع شود). رفتار سینوسی گردابه‌ها را به این صورت می‌توان توجیه نمود که چرخش گردابه‌ها حین نوسان در دو جهت مخالف می‌باشد، به نحوی که در یک ردیف از گردابه‌ها، این چرخش در جهت مثلثاتی و در ردیف دیگر در جهت عکس مثلثاتی می‌باشد.

محور افق در نمودار شکل (٤) با استفاده از حاصل ضرب (U_{in}/D) در زمان، به فرم بی‌بعد در آمده است. محدوده‌ی تغییرات ضرایب پسا برای چهار شبکه‌ی مورد بررسی، به‌ترتیب بین ۱.٤۱ تا ۱.۳۹ می‌باشد. نتایج به‌دست‌آمده از حل چهار شبکه‌ی محاسباتی در جدول (۲) لیست شده است. در این جدول، زمان ایجاد یک نوسان کامل T(s)، متوسط ضرایب برآ و پسا و نیز عدد استروهال برای جریان

سـیال نیـوتنی (We=0) و در رینولـدز ۱۰۰ محاسـبه گردیده و متوسط خطای ضریب پسا اندازه‌گیری شده با کار الویرا [15] مورد مقایسه قرار گرفته است.



شکل ٤ تغییرات ضرایب پسا نسبت به زمان بی‌بعد برای چهار شبکه M-1 تا M-4

جدول ۲ نتایج به‌دست‌آمده از شبکه‌های مختلف

شبکه	T(s)	St	ΔC_L	$\overline{C}_D$	درصد خطا با کار [15]
M-1	٦.۰۵۲	۰.۱٦۵۲	۰.۳۷۰۳	۱.٤۱۹۷	**۳.٤۹**
M-2	٦.۰۷۵	۰.۱٦٤٦	۰.۳٤٤۷	۱.۳۹۳۳	**۱.٦٤**
M-3	٦.۰۹۷	۰.۱٦٤۰	۰.۳۰۱۵	۱.۳۸۸۱	**۱.۲۸**
M-4	٦.۱۰۷	۰.۱٦۳۷	۰.۲۹۸۲	۱.۳۸٦۷	**۱.۲۲**

در جـدول فـوق، ضـریب پسـا بـه‌صـورت $C_D = \frac{F_x}{0.5\rho U^2 d}$ و ضریب برآ بـه‌صـورت $C_L = \frac{F_y}{0.5\rho U^2 d}$ تعریف می‌گردد که در آن F_x و F_y مولفه‌های نیـرو بـر سیلندر می‌باشد. هم‌چنین متوسط ضریب برآ به‌صورت $\Delta C_L = \frac{1}{2}(C_{l\,max} - C_{l\,min})$ و متوسـط ضـریب پسـا به‌صـورت $\overline{C}_D = \frac{1}{2}(C_{d\,max} + C_{d\,min})$ محاسـبه شـده است. با توجه به نمودارهای ضرایب بـرآ و پسا ارائـه شده در بالا مـی‌تـوان دریافـت کـه مقـادیر حاصـل از شبکه‌های M-1، M-2 و M-3 به سـمت شـبکه‌ی M-4 میل می‌کند. هم‌چنین با مقایسه‌ی مقادیر ضریب پسا بـا نتایج حاصـل از کـار الـویرا [15] بـرای جریـان سـیال نیوتنی در Re=100، مشاهده می‌شـود کـه در شـبکه‌ی سوم مقدار خطـا کـم‌تـر از ۱.۲۸٪ مـی‌باشـد. بنـابراین می‌توان این‌گونه بیان نمود که در این تعداد گـره، حـل عددی تقریباً مستقل از شبکه است. پرواضح است که با افزایش تعداد سلول‌هـا، خطـا در حـل عـددی کـاهش می‌یابد، به‌طوری که در شـبکه‌ی M-4 بـا افـزایش تعداد سلول‌ها از ۱۳۵ به ۱۸۰ عدد، این مقدار خطا بـه ۱.۲۲٪ کاهش یافته است. اما باید توجه داشت که ایـن امر به افزایش شدید زمـان و حجـم محاسـبات منجـر می‌شود. لذا در این پژوهش جهت اجتناب از هر گونـه وابستگی تحلیل به شبکه، تمامی محاسـبات بـر مبنـای شبکه M-3 انجام شده است.

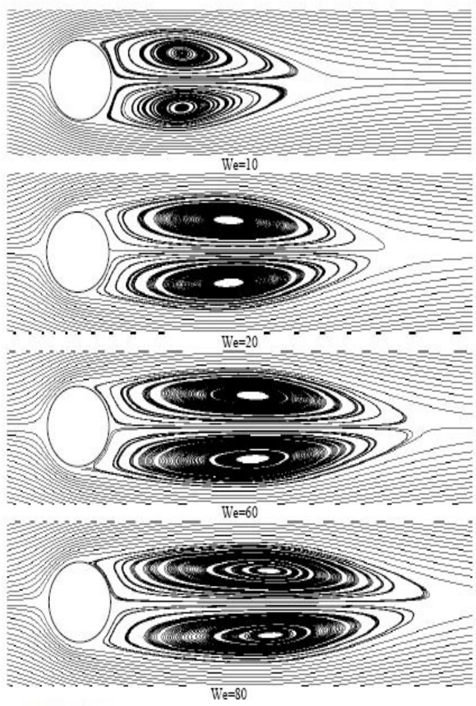
در این مقاله، به‌منظـور مـدل‌سـازی جریـان سـیال ویسکوالاستیک حول سیلندر، برای نخستین بار از مدل سه ثابته‌ی گزیکس به‌عنوان معادلـه‌ی سـاختاری سـیال ویسکوالاستیک استفاده شده است. این مدل غیر خطی، توانایی برجسته‌ای در توصیف ویسکوزیته در ناحیـه‌ی توانی و هم‌چنین اثر اختلاف تنش‌های نرمال برخوردار است و توابع ویسکومتریک در آن کامـل مـی‌باشـد. در شکل (۵)، توزیع میدان ورتیسیته در عدد وایزنبرگ ۸۰ و رینولدز ۱۰۰ قبل از شروع نوسـان در جریـان آورده شده است.



شکل ۵ میدان ورتیسیتی (ω/(U/D)), min:-43 ; max: 43

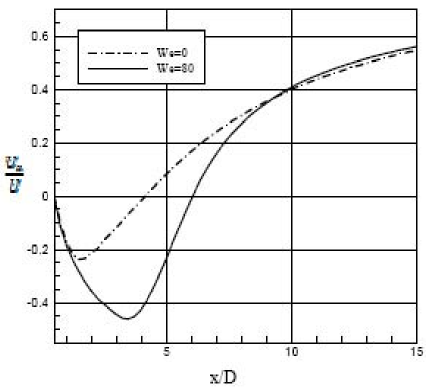
در شکل (٦)، خطوط جریان در رینولـدز بحرانـی برای چهار عـدد وایزنبـرگ مختلـف نشـان داده شـده

است. مشاهده می‌شود که این طول به‌صورت پیوسته، با افزایش عدد وایزنبرگ، زیاد می‌شود. در واقع، ازدیاد خاصیت الاستیک سیال، سبب افزایش پایداری در جریان شده که در نتیجه‌ی آن، رینولدز بحرانی جریان افزایش یافته است. با اندازه گیری فاصله بین نقطه‌ی انتهایی سیلندر تا نقطه‌ای که سرعت محوری در آن به صفر می‌رسد، می‌توان طول ناحیه‌ی گردابه‌ی تشکیل شده در پشت سیلندر را محاسبه نمود. در شکل (۷) تغییرات سرعت محوری در ناحیه‌ی پشت سیلندر برای حالت نیوتنی و ویسکوالاستیک آورده شده است. این طول، برای جریان سیال نیوتنی برابر $L = 4.07D$ و برای جریان سیال ویسکوالاستیک با عدد وایزنبرگ ۸۰ برابر $L = 6.1D$ می‌باشد.

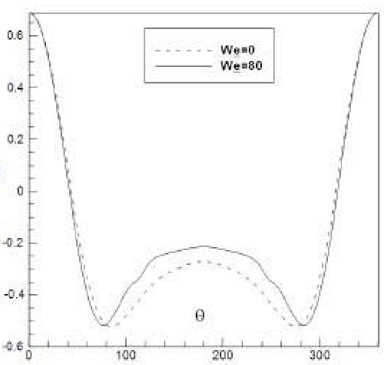


شکل ٦ خطوط جریان در رینولدز بحرانی در محدوده‌ی عدد وایزنبرگ $0 \le We \le 80$

افزایش طول ناحیه‌ی سیرکولاسیون (Circulation) در پشت سیلندر، در اثر تغییر در توزیع فشار روی سطح سیلندر می‌باشد. برای این منظور، توزیع فشار برای حالت نیوتنی و ویسکوالاستیک در شکل (۸) آورده شده است. مشاهده می‌شود که توزیع فشار در جریان سیال ویسکوالاستیک نسبت به حالت پایه نیوتنی، با افزایشی نسبی همراه است. این موضوع به دلیل کاهش تنش برشی است که در اثر خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک رخ داده و سبب به‌وجود آمدن پدیده‌ی کاهش پسا در جریان این‌گونه از سیالات می‌شود. در شکل (۹) توزیع میدان ورتیسیته بعد از شروع نوسان در We=80 و α=0.5 در عدد Re=100 آورده شده است.



شکل ۷ تغییرات سرعت محوری برای جریان سیال نیوتنی (We=0)و ویسکوالاستیک ($We = 80$)

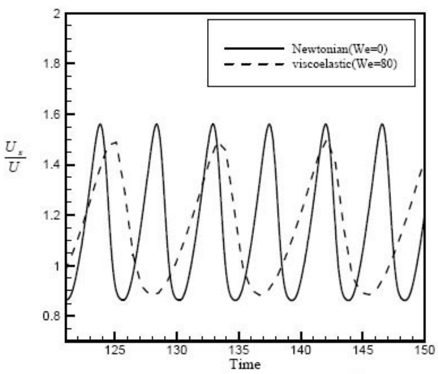


شکل ۸ توزیع فشار روی سطح سیلندر برای جریان سیال ویسکوالاستیک ($We = 80$) و نیوتنی (زاویه‌ی شروع، از نقطه‌ی سکون شروع شده و به‌صورت ساعتگرد می‌باشد)



شکل ۹ جریان نوسانی به‌وجود آمده در پشت سیلندر در α=0.5 و Re=100، We=80

تغییرات سرعت محوری نسبت به زمان برای یک نقطه در ناحیه‌ی جریان برگشتی سیال ویسکوالاستیک (We=80) و جریان نیوتنی(We=0) در شکل (۱۰) آورده شده است. با مقایسه‌ی توزیع میدان‌های سرعت سیال ویسکوالاستیک و نیوتنی در این شکل می‌توان دریافت که دامنه‌ی نوسان در جریان سیال ویسکوالاستیک، نسبت به حالت نیوتنی کم‌تر می‌باشد. به‌علاوه آن‌که کاهش محسوسی در فرکانس جریان نیز مشاهده می‌شود. دلیل چنین موضوعی را می‌توان به خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک و هم‌چنین کاهش ویسکوزیته نسبت به نرخ برش در این گونه از سیالات مرتبط دانست.



شکل ۱۰ سرعت محوری در یک نقطه نسبت به زمان

در شکل (۱۰)، انتخاب زمان شروع در یکی از لحظاتی بوده است که جریان نوسانی در آن به حالت پایدار رسیده است. محور عمودی نیز در این نمودار با استفاده از سرعت ورودی جریان به‌صورت بی‌بعد می‌باشد. مشاهده می‌شود که دامنه و فرکانس جریان در سیال ویسکوالاستیک نسبت به سیال نیوتنی کم‌تر است. هم‌چنین کاهش دامنه نسبت به فرکانس با شدت بیش‌تری رخ می‌دهد.

در جدول (۳) نتایج به‌دست آمده در اثر افزایش خاصیت الاستیک سیال ویسکوالاستیک در قالب عدد وایزنبرگ آورده شده است. با افزایش عدد وایزنبرگ از صفر تا ۸۰ در $\mathrm{Re} = 100$ و $\alpha = 0.5$، مشاهده می‌شود که دوره‌ی تناوب نوسانات جریان، افزیش می‌یابد. این در حالی است که فرکانس جریان نیز در قالب عدد استروهال با همان نسبت کاهش می‌یابد.

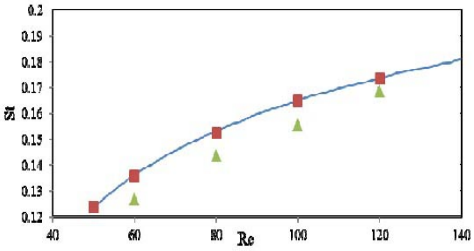
جدول ۳ اثر افزایش خاصیت الاستیک بر مشخصه‌های جریان

We	St	ΔC_L	$\overline{C_d}$	$C_{d\,max}$	$C_{d\,min}$
0	0.165	0.342	1.370	1.380	1.360
5	0.157	0.188	1.323	1.327	1.320
10	0.155	0.167	1.300	1.312	1.307
20	0.155	0.156	1.302	1.304	1.300
40	0.155	0.152	1.298	1.300	1.296
60	0.155	0.151	1.297	1.296	1.295
80	0.155	0.150	1.296	1.298	1.294

با توجه به جدول (۳)، برای مقادیر وایزنبرگ بالاتر از ۲۰ تغییرات ایجاد شده در عدد استروهال و ضرایب برآ و پسا محسوس نمی‌باشد. علت ثابت ماندن عدد استروهال از یک عدد وایزنبرگ مشخص به بعد را می‌توان به زمان آسودگی از تنش سیال ویسکوالاستیک ربط داد. بدین صورت که زمان ایجاد یک تناوب، بعد از وایزنبرگ ۲۰، از زمان آسودگی از تنش سیال ویسکوالاستیک کم‌تر می‌باشد. لذا انتظار نمی‌رود تغییری در فرکانس جریان به‌وجود آید. در واقع هنگامی که زمان آسودگی از تنش، λ، از زمان دوره تناوب بیش‌تر باشد، می‌توان گفت که عملاً تغییری در فرکانس در اثر افزایش خاصیت الاستیک رخ نخواهد داد.

به‌منظور بررسی اثر افزایش عدد رینولدز بر

مشخصه‌های جریان سیال ویسکوالاستیک از قبیل عدد استروهال و ضرایب برآ و پسا، این عدد در محدوده‌ی بین ۵۰ تا ۱۲۰ برای هر دو جریان سیال ویسکوالاستیک $(We=80, \alpha=0.5)$ و سیال نیوتنی مورد بررسی قرار گرفت که نتایج آن در جدول (٤) آورده شده است. هم‌چنین نتایج حاصل از افزایش عدد رینولدز بر جریان سیال نیوتنی با تحقیقات آزمایشگاهی انجام شده توسط ویلیامسون [21] در شکل (۱۱) مورد مقایسه قرار گرفته است. تطابق خوبی بین نتایج آزمایشگاهی و نتایج عددی در این نمودار مشاهده می‌شود. این مقایسه بر روش عددی به کارگرفته شده در این پژوهش صحه می‌گذارد.



شکل ۱۱ مقایسه‌ی نتایج به‌دست‌آمده با نتایج حاصل از تحقیقات پیشین (— خط نتایج کار آزمایشگاهی ویلیامسون [21] ، □ جریان نیوتنی در کار حاضر، Δ جریان سیال ویسکوالاستیک در کار حاضر)

جدول ٤ اثر ازیاد عدد رینولدز بر مشخصه‌های جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک

Re	St	ΔC_L	$C_{D\max}$	$C_{D\min}$	$\overline{C}_D$
Newtonian					
50	0.124	0.060	1.476	1.476	1.476
60	0.136	0.136	1.440	1.438	1.439
80	0.144	0.252	1.390	1.390	1.395
100	0.165	0.342	1.380	1.360	1.380
120	0.173	0.426	1.374	1.341	1.358
Viscoelastic (We=80, α=0.5)					
50	0	0	1.478	1.478	1.478
60	0.126	0.025	1.401	1.401	1.401
80	0.143	0.090	1.333	1.332	1.332
100	0.155	0.150	1.298	1.294	1.296
120	0.168	0.211	1.283	1.276	1.279

با توجه به جدول (٤)، مقادیر به‌دست‌آمده از فرکانس جریان سیال ویسکوالاستیک به خاطر وجود خاصیت الاستیک سیال، کم‌تر از جریان سیال نیوتنی در همان عدد رینولدز می‌باشد. لازم به ذکر است که هیچ‌گونه اطلاعات آزمایشگاهی و یا عددی برای مقایسه‌ی نتایج جریان سیال ویسکوالاستیک وجود ندارد. با مقایسه نتایج جریان سیال نیوتنی و ویسکوالاستیک در جدول (٤) برای هر یک از اعداد رینولدز انتخابی مشاهده می‌شود که نه تنها فرکانس جریان تحت تأثیر خاصیت الاستیک جریان کاهش می‌یابد، بلکه دامنه‌ی ضرایب برآ و پسا نیز به‌شدت تحت تأثیر این پارامتر از سیال ویسکوالاستیک قرار می‌گیرد، به‌نحوی که در عدد رینولدز ۱۲۰، مقدار ضریب برآ برای جریان ویسکوالاستیک تقریباً به نصف مقدار خود در جریان سیال نیوتنی می‌رسد.

نتیجه‌گیری

در این پژوهش، برای نخستین بار از مدل گزیکس به‌عنوان معادله‌ی ساختاری سیال ویسکوالاستیک در شبیه‌سازی جریان حول استوانه استفاده شده است. این مدل، توانایی برجسته‌ای در توصیف ویسکوزیته در ناحیه‌ی توانی و هم‌چنین اختلاف تنش‌های نرمال دارد. لذا با استفاده از این مدل می‌توان به بررسی اثرات اختلاف تنش‌های نرمال بر جریان پرداخت. از جمله دستاوردهای این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود :

– در یک عدد رینولدز ثابت، با افزایش خاصیت الاستیک سیال قبل از رینولدز بحرانی، طول دنباله‌ی ایجادشده در پشت سیلندر افزایش می‌یابد. این طول، برای جریان سیال نیوتنی برابر $L = 4D$ و برای جریان سیال ویسکوالاستیک با $We = 80$ برابر $L = 6D$ می‌باشد.

– خاصیت الاستیک و هم‌چنین خاصیت

باریک‌شوندگی ویسکوزیته نسبت به نرخ برش در سیالات ویسکوالاستیک، سبب افزایش نسبی فشار در ناحیه‌ی پشت سیلندر می‌شود که نتیجه‌ی آن، وقوع پدیده‌ی کاهش پسا در این‌گونه از سیالات می‌باشد.

- در یک عدد رینولدز ثابت، با افزایش خاصیت الاستیک سیال در قالب عدد وایزنبرگ، دوره‌ی تناوب نوسانات جریان، افزیش می‌یابد. این در حالی است که فرکانس جریان نیز در قالب عدد استروهال با همان نسبت کاهش می‌یابد.

- رشد فرکانس جریان نسبت به عدد رینولدز در جریان سیال ویسکوالاستیک نسبت به جریان نیوتنی با نرخ کم‌تری همراه است. به‌نحوی که در عدد رینولدز ۱۲۰، مقدار ضریب برآ برای جریان ویسکوالاستیک تقریباً به نصف مقدار خود در جریان سیال نیوتنی می‌رسد.

مراجع

1. Broadbent, K.M. and Mena, B., "Slow flow of an elastico-viscous fluid past cylinder and spheres". *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 8, pp. 11-19, (1974).
2. Gadd, G.E., "Effects of long–chain molecule additives in water on vortex streets", *Nature*, Vol. 211, pp. 169–170, (1966).
3. James, D.F. and Acosta, A.J., "The laminar flow of dilute polymer solutions a round circular cylinder", *J. Fluid Mech*, Vol. 42, pp. 269-288, (1970).
4. James, D.F. and Gupta, O.P., "Drag on circular cylinders in dilute polymer solution", *Chemical Engineering Journal*, Vol. 67, pp. 62, (1971).
5. Mena, B. and Caswell, B., "Slow flow of an elastic-viscous fluid past an immersed body", *Chemical engineering Journal*, Vol. 8, pp. 125-134, (1974).
6. Koniute, A. and Adler, P.M., "Flow of dilute polymer solutions around circular cylinders", *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 7, pp. 101-106, (1980).
7. Manero, O. and Mena, B., "On the flow of a viscoelastic liquids past a circular cylinder", *J. Non-Newtonian Fluid Mech*, Vol. 9, pp. 379-387, (1981).
8. Ultman, J.S. and Denn, M.M., "Slow viscoelastic flow past submerged objects". *Chemical engineering Journal*, Vol. 2, pp. 81-89, (1971).
9. Kalashnikov, N. and Kudin, A.M., "Kármán vortices in the flow of drag reduction polymer solutions", *Nature*, Vol. 225, pp. 445– 446, (1970).
10. Usui, H., Shibata, T. and Sano, Y., "Kármán vortex behind a circular cylinder in dilute polymer solutions", *Chemical Engineering Journal*, Vol. 13, pp. 77–79, (1980).
11. Cadot, O. and Kumar, S., "Experimental characterization of viscoelastic effects on two– and three – dimensional shear instabilities", *J. Fluid Mech*, Vol. 416, pp. 151–172, (2000).
12. Cadot, O. and Lebey, M., "Shear instability inhibition in a cylinder wake by local injection of viscoelastic fluid", *Phys. Fluid*, Vol. 11, pp. 494–496, (1999).

13. Cressman, J.R, Bailey, Q. and Goldburg, W.I., "Modification of a vortex street by a polymer additive", *Phys. Fluids*, Vol. 13, pp. 867–871, (2001).
14. Coelho, P.M. and Pinho, F.T., "Vortex shedding in cylinder flow of shear–thining fluids I. Identification and demarcation of flow regime", *J. Non–Newtonian Fluid Mech*, Vol. 110, pp. 143–176, (2003).
15. Oliveira, P.J., "Method for time–dependent simulations of viscoelastic flows; vortex shedding behind cylinder", *J. Non–Newtonian Fluid Metch*. Vol. 101, pp. 113–137, (2001).
16. Sahin, M. and Owens, R.G., "On the effects of viscoelasticity on two–dimensional vortex dynamics in the cylinder wake", *J. Non–Newtonian Fluid Mech*, Vol. 123, pp. 121–139, (2004).
17. Richter, D., Iaccarino, G. and Shaqfeh, E.S.G., "Simulation of three–dimentional viscoelastic flows past a circular cylinder at moderate Reynolds numbers", *J. Fluid Mech*, pp. 1–28, (2010).
18. Giesekus, H., "A simple constitutive equation for polymer fluids based on the concept of deformation-dependent tensorial mobility". *J. Non-newtonian Fluid Mech*, Vol.11, pp. 69-109, (1982).
19. Bird, R.B. and Wiest, J.M., "Constitutive equations for polymeric liquids", *Annu. Rev. Fluid Mech*, Vol. 27, pp. 169–193, (1995).
20. Xue, S.C., Phan–Thein, N. and Tanner, R.I., "Numerical study of secondary flows of viscoelastic fluid in straight pipes by an implicit finite volume method*", J. Non– Newtonian Fluid Mech*, Vol. 59, pp. 191–213, (1995).
21. Williamson, C.H.K., "Oblique and parallel modes of vortex dislocations due to a point disturbance in a planer wake". *J. Fluid Mech*, Vol. 206, (1989)